|  |
| --- |
| **Exponentielles Wachstum**Exponentielles Wachstum zeichnet sich dadurch aus, dass es immer schneller oder langsamer wächst oder fällt.Die allgemeine Formel lautet y = b ∙ ax. Dabei ist b der Startwert und a der Wachstumsfaktor.Beispiel: Jedes Jahr bekommt Fritz doppelt so viel Taschengeld wie im Vorjahr. Im Moment bekommt er 20 €. Stelle hierzu die Wachstumsformel auf!Das Taschengeld steigt immer schneller, also handelt es sich um exponentielles Wachstum. Dabei ist 20€ der Startwert und in dem Wort „Doppelt“ steckt der Wachstumsfaktor 2. Also: y = 20 ∙ 2x Beispiele für exponentielles Wachstum: * Ein Auto wird beim Beschleunigen immer schneller.
* Eine Population vermehrt sich immer schneller.
* Irgendetwas wächst oder fällt um den Faktor 3
* Jedes Jahr bekommt man auf dem Konto 3 % Zinsen
 |
| Die Wertetabelle bei exponentiellen Wachstum:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 5 | 10 | 20 | 40 |

Jeder y-Wert wird um genau das Doppelte größer. Wir haben also einen Anstieg um den Wachstumsfaktor 2. Will man eine Tabelle auf exponentielles Wachstum prüfen, teilt man immer den y Wert, der rechts danebenliegt durch den linken. Erhält man überall den gleichen Wachstumsfaktor so ist das Wachstum exponentiell. 10 : 5 = 2 20 : 10 = 2 40 : 20 = 2 🡺 Es handelt sich um exponentielles Wachstum mit dem Anfangswert 5 und einem Wachstumsfaktor von 2. Die Gleichung hierfür lautet also: y = 5 ∙ 2x und der Graph sieht hierzu folgendermaßen aus: Dabei schneidet der Graph die y- Achse bei 5 (= der Anfangswert). Anhand des Graphen oder mit Hilfe der Formel kann man nun 3 unterschiedliche Dinge ermitteln:Beispiel: Eine Population von Hamstern verdreifacht sich alle 3 Monate. Zu Beginn der Zählung waren es 10 Hamster. Nach 9 Monaten (=3 Zeiteinheiten) sind es 270 Hamster.Hier ergeben sich 4 Aufgabentypen:  |
| Die Suche nach y:**Frage:** Wie viel Hamster sind es nach 9 Monaten?  **Lösung:** Aufstellen des Funktionsterms: Dabei muss man die 9 Monate in drei Zeiteinheiten umrechnen. y = 10 ∙ 33 = 10 ∙ 27 = 270.  **Antwort**: Nach 9 Monaten sind es 270 Hamster.  | Die Suche nach dem Startwert:  **Frage:** Wie viele Hamster waren am Anfang im Stall? **Lösung:** 1. = b ∙ 33

 270 = b ∙ 27 | : 27 10 = b **Antwort**: An Anfang waren es 10 Hamster.  | Die Suche nach dem Wachstumsfaktor: **Frage:** Wie schnell oder mit welchem Wachstumsfaktor wächst eine Population, die innerhalb von 9 Monaten (Eine Zeiteinheit = 3 Monate) von 10 auf 270 Hamster ansteigt? **Lösung:** 270 = 10 ∙ a3 | :1027 = a3**Antwort:** Der Wachstumsfaktor beträgt 3.  | Die Suche nach dem Zeitraum: Wird später beantwortet |
| **Besonderheiten beim Wachstumsfaktor, der in Prozent angegeben ist:** **Aufgabe:** Eine 1,2 m lange Alge vergrößert sich täglich um 30 %. Klar, dass die Alge immer schneller wächst und somit exponentielles Wachstum vorliegt. Aber wie gibt man die 30 % als Wachstumsfaktor an?Die „Formel“ lautet: , also = 1,3.Also lautet die Formel: y = 1,2 ∙ 1,3x Beispiele: 50% ≙ 1,5 oder 60% ≙ 1,6 oder 100% ≙ 2Für den Zerfall gilt folgendes:Nimmt etwas um 10% ab, hat man einen Wachstumsfaktor 0,9 , also Beispiele: 20% ≙ 0,8 oder 30% ≙ 0,7  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |
| --- |
| **Aufgaben:**Prüfe ob die folgenden Tabellen exponentielles Wachstum darstellen:  |
|

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 11 | 14 | 17 | 21 |

 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 4 | 6 | 9 | 13,5 |

 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 2 | 4 | 6 |
| y | 4 | 16 | 64 | 256 |

. |
| Ergänze die Tabellen so, dass ein exponentielles dargestellt wird.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 |  | 3 |
| y | 11 | 22 | 44 |  |

 |
| Entscheide ob es sich um lineares oder exponentielles Wachstum handelt:

|  |  |
| --- | --- |
| Der Lohn von Toni steigt jährlich um 3%.  |  |
| Eine Pflanze wächst um 12 cm pro Zeiteinheit. |  |
| Ein Hefeteig mit 5 g Hefe verdreifacht pro Stunde sein Volumen. |  |
| In einen Tank werden stündlich 800 Liter gepumpt. |  |
| Ein Kapital erbringt jedes Jahr 6 % Zinsen.  |  |
| Eine Schädlingsart wächst um 15 % jedes Jahr. |  |
| Tropfsteine wachsen jährlich um 1,3 mm. |  |
| Ein Auto verliert die Hälfte seines Wertes pro Jahr. |  |

 |
| Welche Wertetabelle stellt lineares, welche quadratisches, welche exponentielles Wachstum dar? Gib in diesen Fällen jeweils die Funktionsgleichung an.**Tipp:** Es kann hilfreich sein, die Punkte zu zeichnen. Dann kannst du den Verlauf des Grafen besser erkennen.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | Linear, quadratisch oder exponentiell? | **Funktion** |
| **y1** | -2 | 1 | 4 | 7 | 10 |  |  |
| **y2** | 0,1 | 1 | 10 | 100 | 1000 |  |  |
| **y3** | -3 | 0 | -3 | -12 | -27 |  |  |
| **y4** | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 |  |  |
| **y5** | 0,4 | 1 | 2,5 | 6,25 | 15,625 |  |  |
| **y6** | 3 | 5 | 6 | 4 | 2 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

 |

 |
|  |
| Bei einer Kiefer bilden sich in der Regel jährlich an jedem Zweigende fünf neue Triebe. Ein junger Kiefernast hat drei Zweig­enden. Mit wie vielen Enden kann man nach l, 2, 3, 4 Jahren rechnen? |
| a) Ein Kapital von 8000€ wird mit einem festen Zinssatz von 5% jährlich verzinst. Wie groß ist der Wachstumsfaktor (=„Zinsfaktor") des Kapitals von einem Jahr zum nächs­ten? Auf wie viel € wächst das Kapital nach Ablauf von fünf Jahren mit Zinsen und Zinseszinsen? |
| Helge erfährt eine tolle Neuigkeit. Nach 1 Minute erzählt er sie (,anz vertraulich einem Freund weiter. Nach einer weiteren Minute erzählen beide wieder ganz vertraulich die Neuigkeit einem nicht eingeweihten Freund/einer nicht eingeweihten Freundin. Nimm an, es geht immer so weiter. Nach wie vielen Minuten weiß es die ganze Klasse mit 32 Schülern, wann die ganze Schule mit rund 1000 Schülern?Lösung:  |

|  |
| --- |
| **Exponentielles Wachstum Lösung**Exponentielles Wachstum zeichnet sich dadurch aus, dass es immer schneller oder langsamer wächst oder fällt.Die allgemeine Formel lautet y = b ∙ ax. Dabei ist b der Startwert und a der Wachstumsfaktor, der angibt um wie viel y pro Zeiteinheit fällt oder steigt und x die Anzahl der Zeiteinheiten. Beispiel: Jedes Jahr bekommt Fritz doppelt so viel Taschengeld wie im Vorjahr. Im Moment bekommt er 20 €. Stelle hierzu die Wachstumsformel auf!Das Taschengeld steigt immer schneller, also handelt es sich um exponentielles Wachstum. Dabei ist 20€ der Startwert und in dem Wort „Doppelt“ steckt der Wachstumsfaktor 2. Also: y = 20 ∙ 2x Beispiele für exponentielles Wachstum: * Ein Auto wird beim Beschleunigen immer schneller.
* Eine Population vermehrt sich immer schneller.
* Irgendetwas wächst oder fällt um den Faktor 3
* Jedes Jahr bekommt man auf dem Konto 3 % Zinsen
 |
| Die Wertetabelle bei exponentiellen Wachstum:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 5 | 10 | 20 | 40 |

Jeder y-Wert wird um genau das Doppelte größer. Wir haben also einen Anstieg um den Wachstumsfaktor 2. Will man eine Tabelle auf exponentielles Wachstum prüfen, teilt man immer den y Wert, der rechts danebenliegt durch den linken. Erhält man überall den gleichen Wachstumsfaktor so ist das Wachstum exponentiell. 10 : 5 = 2 20 : 10 = 2 40 : 20 = 2 🡺 Es handelt sich um exponentielles Wachstum mit dem Anfangswert 5 und einem Wachstumsfaktor von 2. Die Gleichung hierfür lautet also: y = 5 ∙ 2x und der Graph sieht hierzu folgendermaßen aus: Dabei schneidet der Graph die y- Achse bei 5 (= der Anfangswert). Anhand des Graphen oder mit Hilfe der Formel kann man nun 3 unterschiedliche Dinge ermitteln:Beispiel: Eine Population von Hamstern verdreifacht sich alle 3 Monate. Zu Beginn der Zählung waren es 10 Hamster. Nach 9 Monaten (=3 Zeiteinheiten) sind es 270 Hamster.Hier ergeben sich 4 Aufgabentypen:  |
| Die Suche nach y:**Frage:** Wie viel Hamster sind es nach 9 Monaten?  **Lösung:** Aufstellen des Funktionsterms: Dabei muss man die 9 Monate in drei Zeiteinheiten umrechnen. y = 10 ∙ 33 = 10 ∙ 27 = 270.  **Antwort**: Nach 9 Monaten sind es 270 Hamster.  | Die Suche nach dem Startwert:  **Frage:** Wie viele Hamster waren am Anfang im Stall? **Lösung:** 1. = b ∙ 33

 270 = b ∙ 27 | : 27 10 = b **Antwort**: An Anfang waren es 10 Hamster.  | Die Suche nach dem Wachstumsfaktor: **Frage:** Wie schnell oder mit welchem Wachstumsfaktor wächst eine Population, die innerhalb von 9 Monaten (Eine Zeiteinheit = 3 Monate) von 10 auf 270 Hamster ansteigt? **Lösung:** 270 = 10 ∙ a3 | :1027 = a3**Antwort:** Der Wachstumsfaktor beträgt 3.  | Die Suche nach dem Zeitraum: **Frage:** Wie lange dauert es, bis aus 10 Hamstern 270 Hamster werden?Durch Ausprobieren erhält man:y = 10 ∙ 33 = 270. Also nach 3 Zeiteinheiten, bzw. nach 9 Monaten. |
| **Besonderheiten beim Wachstumsfaktor, der in Prozent angegeben ist:** **Aufgabe:** Eine 1,2 m lange Alge vergrößert sich täglich um 30 %. Klar, dass die Alge immer schneller wächst und somit exponentielles Wachstum vorliegt. Aber wie gibt man die 30 % als Wachstumsfaktor an?Die „Formel“ lautet: , also = 1,3.Also lautet die Formel: y = 1,2 ∙ 1,3x Beispiele: 50% ≙ 1,5 oder 60% ≙ 1,6 oder 100% ≙ 2Für den Zerfall gilt folgendes:Nimmt etwas um 10% ab, hat man einen Wachstumsfaktor 0,9 , also Beispiele: 20% ≙ 0,8 oder 30% ≙ 0,7  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |
| --- |
| **Aufgaben:**Prüfe ob die folgenden Tabellen exponentielles Wachstum darstellen:  |
|

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 11 | 14 | 17 | 21 |

Gar kein Wachstum, da der Wachstumsfaktor zwar in den ersten drei Spalten gleich ist und immer um 3 anwächst, aber leider nicht in der 4 Spalte |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 4 | 6 | 9 | 13,5 |

Es handelt sich um exponentielles Wachstum mit Faktor 1,5 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 2 | 4 | 6 |
| y | 4 | 16 | 64 | 256 |

Exponentielles Wachstum mit Faktor 4. |
| Ergänze die Tabellen so, dass ein exponentielles Wachstum dargestellt wird.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 |  | 3 |
| y | 11 | 22 | 44 |  |

 |
| Entscheide ob es sich um lineares oder exponentielles Wachstum handelt:

|  |  |
| --- | --- |
| Der Lohn von Toni steigt jährlich um 3%.  | Exponentiell |
| Eine Pflanze wächst um 12 cm pro Zeiteinheit. | Linear |
| Ein Hefeteig mit 5 g Hefe verdreifacht pro Stunde sein Volumen. | Exponentiell |
| In einen Tank werden stündlich 800 Liter gepumpt. | Linear |
| Ein Kapital erbringt jedes Jahr 6 % Zinsen.  | Exponentiell |
| Eine Schädlingsart wächst um 15 % jedes Jahr. | Exponentiell |
| Tropfsteine wachsen jährlich um 1,3 mm. | Linear |
| Ein Auto verliert die Hälfte seines Wertes pro Jahr. | Exponentiell |

 |
| Welche Wertetabelle stellt lineares, welche quadratisches, welche exponentielles Wachstum dar? Gib in diesen Fällen jeweils die Funktionsgleichung an.**Tipp:** Es kann hilfreich sein, die Punkte zu zeichnen. Dann kannst du den Verlauf des Grafen besser erkennen.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | Linear, quadratisch oder exponentiell? | **Funktion** |
| **y1** | -2 | 1 | 4 | 7 | 10 | linear | **f(x) = 3x+1** |
| **y2** | 0,1 | 1 | 10 | 100 | 1000 | Exponentiell | **f(x) = 10x** |
| **y3** | -3 | 0 | -3 | -12 | -27 | Qquadratisch | **f(x) = -3x²** |
| **y4** | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | linear | **f(x) = -x +2** |
| **y5** | 0,4 | 1 | 2,5 | 6,25 | 15,625 | Exponentiell | **f(x) = 2,5x** |
| **y6** | 3 | 5 | 6 | 4 | 2 | nichts | **nichts** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

 |

 |
|  |
| Bei einer Kiefer bilden sich in der Regel jährlich an jedem Zweigende fünf neue Triebe. Ein junger Kiefernast hat drei Zweig­enden. Mit wie vielen Enden kann man nach l, 2, 3, 4 Jahren rechnen?Lösung: y = 3 ∙5x 15 75 375 1875 |
| a) Ein Kapital von 8000€ wird mit einem festen Zinssatz von 5% jährlich verzinst. Wie groß ist der Wachstumsfaktor (=„Zinsfaktor") des Kapitals von einem Jahr zum nächs­ten? Auf wie viel € wächst das Kapital nach Ablauf von fünf Jahren mit Zinsen und Zinseszinsen?Lösung: Wachstumsfaktor: 1,05 y = 8000 ∙ 1,05x Nach 5 Jahren 10210,25 €b) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?Nach 15 Jahren hat sich das Kapital etwas mehr als verdoppelt. |
| Helge erfährt eine tolle Neuigkeit. Nach 1 Minute erzählt er sie ganz vertraulich einem Freund weiter. Nach einer weiteren Minute erzählen beide wieder ganz vertraulich die Neuigkeit je einem nicht eingeweihten Freund/einer nicht eingeweihten Freundin. Nimm an, es geht immer so weiter. Nach wie vielen Minuten weiß es die ganze Klasse mit 32 Schülern, wann die ganze Schule mit rund 1000 Schülern?Lösung: Durch Ausprobieren erhält man: Klasse: Nach 5 Minuten und die Schule nach 10 Minuten |